



TITLE:

# 日経 225 オプション市場のボラティリティ・リスク・プレミアム(不確実性を含む意思決定の数理とその応用)

AUTHOR(S):

内田, 康嗣; 宮崎, 浩一

---

CITATION:

内田, 康嗣 ...[et al]. 日経 225 オプション市場のボラティリティ・リスク・プレミアム(不確実性を含む意思決定の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2007, 1548: 202-209

ISSUE DATE:

2007-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/80817>

RIGHT:

## 日経 225 オプション市場のボラティリティ・リスク・プレミアム

電気通信大学大学院・電気通信学研究科 内田 康嗣(Yasutsugu Uchida), 宮崎 浩一(Koichi Miyazaki)  
The University of Electro-Communications, The Graduate School of Electro-Communications

### 1. はじめに

オプション価格評価式として有名な Black-Scholes 式が発表されてから 30 年以上が経過した今日、オプション市場は金融市場参加者にとって必要不可欠な市場に発展した。それに伴い、金融工学もこの 30 年間に爆発的に発展し、オプション評価モデルに関する研究は多岐にわたる。その中で、一つの大きな潮流となっているのが、確率ボラティリティモデル(以下 SV モデルと呼ぶ)への発展がある。Black-Scholes (以下、適宜 BS と略す)式は株価が幾何ブラウン運動に従い、株価収益率のボラティリティが一定との仮定の下で導かれた評価式である。しかし、現実の市場においてボラティリティは一定ではなく、株価が上昇(下落)するとボラティリティが下落(上昇)するようなボラティリティの変動が確認されている。このような、ボラティリティの変動を株価過程に組み込んだモデルが、確率ボラティリティモデルである。

確率ボラティリティモデルは、1980 年代の後半に導入され、確率ボラティリティモデルに基づく解析的なオプション評価式が Heston[1993]に与えられるなど様々な研究がなされてきた。このように、確率ボラティリティモデルを用いたオプション評価法の研究は進展してきたが、金融工学の他分野に比べると実証的研究は比較的手薄である。特に、ボラティリティが一定のモデルと確率ボラティリティモデルとの間での最大の相違点に関する部分の実証研究は、著者等の知る限り Bakshi/Kapadia[2003]まで見当たらない。その相違点とは、ボラティリティ自体が確率変動する場合には、ボラティリティに関するリスクプレミアムが生じるという点である。BS モデルの枠組みでは、株価変動によるオプション価格の不確実性は原資産株式を用いたデルタヘッジで除去できるが、SV モデルの枠組みにおいては、ボラティリティ自体の変動による不確実性がのこるため、このようなボラティリティのリスク(不確実性)に対しプレミアム(ボラティリティ・リスク・プレミアム)が生じる。Bakshi/Kapadia(2003)では、SV モデルを用いたデルタヘッジ戦略の収益(ヘッジゲイン)とボラティリティ・リスク・プレミアムの関係を理論的に示したうえで、実際の S&P500 の市場オプション価格データを用いて、ボラティリティ・リスク・プレミアムの存在を確認した。

本研究では、S&P500 と比較して市場参加者が少なく効率的でないと言われる日経 225 オプション市場におけるボラティリティ・リスク・プレミアムの特性を検証する。Bakshi/Kapadia(2003)の理論の要点を整理し、SV モデルの枠組みにおいて、ボラティリティ・リスク・プレミアムの符号・大きさとデルタヘッジゲインとの関係を示し、実際の日経 225 オプション価格を用いて実証する。また、得られた結果と Bakshi/Kapadia (2003)における S&P500 の結果を比較し、米国と日本との市場の違いについても考察する。

本論文の構成は、以下の通りである。次節では、オプションの基礎的な用語・考え方を示す。節 3 では、本研究で用いる 2 つのモデルのヘッジゲインと、その乖離の特性を示す。節 4 では、実証分析手法を理論と併せて説明する。節 5 では、実証結果とその考察を示す。最終節では、まとめと結語を付す。

### 2. 本研究に用いるファイナンスの概念、公式、及び用語

#### 2.1 ヨーロピアン・コールオプションとは

コールオプションとは、「満期  $t + \tau$  (現時点  $t$ , 残存期間  $\tau$ ) に、原資産をあらかじめ定めた価格(権利行使価格  $K$ )で買うことができる権利」のことである。

図 1 は縦軸に利益・収益を、横軸に満期  $t + \tau$  における株価  $S_{t+\tau}$  とし、権利行使価格  $K$  が 1000 円、オプション価格が 100 円のコールオプションの買い手のペイオフダイアグラムを示した。

現時点  $t$  における株価  $S_t$  と  $K$  が等しい状態を ATM,  $S_t$  が  $K$  より大きい状態を ITM,  $S_t$  が  $K$  より小さい状態を OTM と呼ぶ。

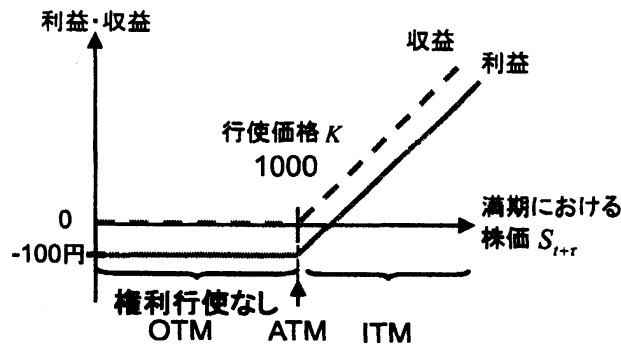


図 1: コールオプションの利益・収益

## 2.2 デルタヘッジに基づくオプション評価

ここでは、デルタヘッジの考え方に基づいて、Black-Scholes 式の導出を述べる。株価リターンが従う確率過程としては、次の幾何ブラウン運動(以後、BS モデルと呼ぶ)を仮定する。

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

ここで、 $S_t$  は原資産価格、 $\mu, \sigma$  はそれぞれ株価リターンの期待値とボラティリティ、 $dW_t$  はウィナー過程である。原資産価格  $S_t$  が式(1)に従う場合、満期  $t+T$  の  $t$  時点オプション価格  $C_t$  の従う確率過程は伊藤の公式から、

$$dC_t = \left( \frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \mu S_t \right) dt + \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t \quad (2)$$

と表すことができる。式(2)には確率的振舞いを示す部分(確率項)  $\partial C / \partial S_t \sigma S_t dW_t$  がある。そこでオプションを 1 単位購入し、原資産株式を  $\partial C / \partial S_t$  (デルタ  $\Delta_t$  と表記する)単位売却してリスクのない(確率項のない)無リスクポートフォリオを構築することを考える。この無リスクポートフォリオを構築することでオプションの不確実な価格変動リスクをヘッジすることをデルタヘッジと呼ぶ。構築した無リスクポートフォリオはリスクフリー(確率項がない)であるから、その収益率はリスクフリーレート  $r$  で運用した収益率となる(無裁定条件)。この無裁定条件から、式(3)の BS モデルでの微分方程式が導出される。

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} = r C_t \quad (3)$$

式(3)を、満期における次の境界条件  $C_{t+T} = \max(S_{t+T} - K, 0)$  (図 1 点線)を付した境界値問題として解くことで、コールオプション価格式(4)(Black-Scholes 式、以後、BS 式と呼ぶ)が得られる。

$$C_t = S_t \Phi \left( \frac{\log(S_t / K) + (r + \sigma^2 / 2) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) - K e^{-r \tau} \Phi \left( \frac{\log(S_t / K) + (r - \sigma^2 / 2) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) \quad (4)$$

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \quad (5)$$

## 3. ヘッジとヘッジゲイン[Bakshi/Kapadia(2003)]

本節では、BS モデルと SV(Stochastic Volatility)モデルの 2 つのモデルにおけるデルタヘッジ戦略の収益(ヘッジゲイン)の乖離とボラティリティ・リスク・プレミアムとの関係を見るために、Bakshi/Kapadia(2003)を整理する形で 2 つのモデルにおけるヘッジとそのヘッジゲインを示す。SV モデルとは、ボラティリティ  $\sigma_t$  が株価水準に応じて変動するのみならず、それ自体にも確率変動が仮定されるモデルである。実際の市場においては、株価の変動とともにボラティリティも変動しており、実際の市場にボラティリティが確率変動するモデルを採用するのは合理的である。

### 3.1 BS モデルのヘッジとヘッジゲイン

この節では、BS モデルのヘッジとそのヘッジゲイン(以後、BS ヘッジゲインと呼ぶ)を示す。BS ヘッジゲインは、節 2.2 におけるオプション価格過程式(2)と偏微分方程式(3)を用い、無裁定条件を満たすオプション価格過程を式(9)と表現できる。

$$dC_t = \Delta_t dS_t + r(C_t - \Delta_t S_t)dt \quad (9)$$

時点  $t$  とともに  $\Delta_t$  も変化するが、現時点  $t$  から満期  $t + \tau$  まで連続型で表現すると式(10)となる。

$$C_{t+\tau} - C_t = \int_t^{t+\tau} \Delta_u dS_u + \int_t^{t+\tau} r(C_u - \Delta_u S_u)du \quad (10)$$

ヘッジゲイン( $\Pi_{t,t+\tau}$ )を式(11)で定義すると、BS ヘッジゲインの期待値は 0 となる。

$$\Pi_{t,t+\tau} \equiv C_{t+\tau} - C_t - \int_t^{t+\tau} \Delta_u dS_u - \int_t^{t+\tau} r(C_u - \Delta_u S_u)du \quad (11)$$

$C_t$  が BS 式オプション価格に従う時、どんな残存期間  $\tau$  に対しても連続的な取引を行えば理論的には、期待ヘッジゲイン  $E_t(\Pi_{t,t+\tau})$  は 0 である。しかし、現実的には連続的にヘッジすることは不可能なので、満期まで  $N$  回リバランスする離散型でのヘッジゲイン  $\pi_{t,t+\tau}$  を考える。

$$\pi_{t,t+\tau} \equiv C_{t+\tau} - C_t - \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_t (S_{t_{n+1}} - S_{t_n}) - \sum_{n=0}^{N-1} r(C_t - \Delta_t S_t) \frac{\tau}{N} \quad (12)$$

ここで離散と連続ヘッジゲインの乖離がある為、 $E_t(\pi_{t,t+\tau})$  は 0 とは限らない。過去に離散と連続ヘッジゲインの乖離を調べた研究として、Figlewski[1989]、Bertsimas/Kogan/Lo[2000]では、離散と連続ヘッジゲインの乖離は BS モデル、SV モデルでも微小であると示されている。

### 3.2 SV モデルのヘッジとヘッジゲイン

この節では、SV モデルのヘッジとそのヘッジゲインを示す。SV モデルは次の株価過程モデルであり、ヘッジゲインの導出には節 3.1 と同様にオプション価格過程と偏微分方程式を用いる。

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^1 \quad (13)$$

$$d\sigma_t = (-\kappa\sigma_t)dt + \nu dW_t^2 \quad (14)$$

ここで、 $dW_t^1$ 、 $dW_t^2$  は互いの相関が  $\rho$  であるウィナー過程、 $\sigma_t$  は確率過程に従い、ドリフト係数  $(-\kappa\sigma_t)$  と拡散係数  $\nu$  は  $S_t$  と独立である。

株価過程に伊藤の公式を用いると、オプション価格過程  $dC_t$  は式(15)のように表せる。

$$dC_t = \left( \frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + \mu S_t \Delta_t + (-\kappa\sigma_t) \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_t} + \frac{1}{2} \nu^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial \sigma_t^2} + \nu \sigma_t S_t \rho \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t \partial \sigma_t} \right) dt + \sigma_t S_t \Delta_t d\tilde{W}_t^1 + \nu \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_t} d\tilde{W}_t^2 \quad (15)$$

SV モデルでの偏微分方程式は式(16)と表せることが知られている。

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \nu^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial \sigma_t^2} + \nu \sigma_t S_t \rho \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t \partial \sigma_t} + r S_t \Delta_t + ((-\kappa\sigma_t) - \lambda_t) \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_t} = r C_t \quad (16)$$

SV モデルにおけるオプション価格過程式(15)と偏微分方程式(16)を用い、無裁定条件を満たすオプション価格過程を表現できる。

$$dC_t = (C_t - \Delta_t S_t) r dt + \Delta_t dS_t + \lambda_t \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_t} dt + \nu \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_t} dW_t^2 \quad (17)$$

時点  $t$  とともに  $\Delta_t$  も変化するが、現時点  $t$  から満期  $t + \tau$  まで連続で表現すると式(18)となる。

$$C_{t+\tau} - C_t = \int_t^{t+\tau} (C_u - \Delta_u S_u) r du + \int_t^{t+\tau} \Delta_u dS_u + \int_t^{t+\tau} \lambda_u \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} du + \int_t^{t+\tau} \nu \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} d\tilde{W}_u^2 \quad (18)$$

ヘッジゲイン  $\Pi_{t,t+\tau}$  に式(18)の左辺を代入すると、SV ヘッジゲインの期待値は、

$$E_t(\Pi_{t,t+\tau}) = \int_t^{t+\tau} E_t \left( \lambda_u[\sigma_u] \frac{\partial C_u}{\partial \sigma_u} \right) du \quad (19)$$

となる。式(14)から、SV ヘッジゲインには  $\lambda_u[\sigma_u]$  が存在することがわかる。ここで、ボラティリティ・リスク・プレミアムと呼ばれるものであり、 $\partial C_u / \partial \sigma_u$  はオプションのベガである。ボラティリティ・リスク・プレミアムが存在しない BS 期待ヘッジゲインの期待値は  $E_t(\Pi_{t,t+\tau}) = 0$  であるので、ボラティリティ・リスク・プレミアムがオプション価格に与える影響は式(14)を用いて検証できる。実証分析においては、離散ヘッジゲイン式(7)を利用する。SV 期待ヘッジゲイン式(14)は現時点  $t$  から満期  $t + \tau$  までの積分で表されており、現時点では未知である将来のベガ  $\partial C_u / \partial \sigma_u$  やボラティリティ・リスク・プレミアム  $\lambda_u[\sigma_u]$  が用いられている。

### 3.3 SV ヘッジゲインの展開

本節では式(19)の現時点  $t$  で未知である、ベガ  $\partial C_u / \partial \sigma_u$  とボラティリティ・リスク・プレミアム  $\lambda_u[\sigma_u]$  との積を、現時点  $t$  での値で表現するために、Ito-Taylor 展開を用いる (Milstein[1995])。そして、 $g(S_t, \sigma_t) \equiv \lambda_t[\sigma_t](\partial C_t / \partial \sigma_t)$  と置き、Ito-Taylor 展開すると式(20)が得られる。

$$\int_t^{t+\tau} g(S_u, \sigma_u) du = \int_t^{t+\tau} g(S_t, \sigma_t) + \mathcal{E} \int_t^{t+\tau} g(S_u, \sigma_u) du' du \quad (20)$$

ここで、微分作用素は  $\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial}{\partial S_t} + (-\kappa \sigma_t) \frac{\partial}{\partial \sigma_t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S_t^2} + \frac{1}{2} \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma_t^2} + \nu \sigma_t S_t \frac{\partial^2}{\partial \sigma_t \partial S_t}$  を

示す。式(20)の第2項目に再度 Ito-Taylor 展開を用い、さらに得られる式の第2項目に Ito-Taylor 展開を用いる。この作業を繰り返すことで、微分作用素  $\mathcal{E}$  があるが、全て現時点  $t$  での値で表現できる。

$$E_t \left( \int_t^{t+\tau} g(S_u, \sigma_u) du \right) = \tau \left[ \lambda_t \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_t} \right] + \frac{\tau^2}{2} \mathcal{E} \left[ \lambda_t \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_t} \right] + \frac{\tau^3}{6} \mathcal{E}^2 \left[ \lambda_t \frac{\partial C_t}{\partial \sigma_t} \right] + \dots \quad (21)$$

式(21)から、 $E_t(\Pi_{t,t+\tau})$  が残存期間  $\tau$  とベガ  $\partial C_t / \partial \sigma_t$  の変数(株価  $S_t$ 、ボラティリティ  $\sigma_t$ 、権利行使価格  $K$ )の4変数に依存すると確認できる。式(21)の  $\mathcal{E}[g(S_t, \sigma_t)]$ 、 $\mathcal{E}^2[g(S_t, \sigma_t)]$ 、... の展開を導き出すために次のような仮定を置く。

オプション・ベガの関数要素には  $S_t, \tau, \sigma_t, K$  があるので、ベガ  $\partial C_t / \partial \sigma_t$  の要素における  $S_t$  の影響を受けない関数  $\alpha_t(\sigma_t, \tau, y)$  を置くとベガは  $\alpha_t(\sigma_t, \tau, y) S_t$  と表せる。ここでマネーネス  $y$  は  $S_t e^{(r-z)\tau} / K$  を表し、本研究で用いるコールオプションにおいて、 $y < 1$  の時 Out of The Money(OTM)、 $y \approx 1$  の時 ATM、 $y > 1$  の時 In The Money(ITM)を示す指標となる。但し、 $z$  は配当利回りである。ボラティリティ・リスク・プレミアム  $\lambda_t$  を、Heston[1993]の仮定と同様に  $\lambda' \sigma_t$  ( $\lambda'$  は定数)とすると、 $g(S_t, \sigma_t)$  は  $\lambda' \sigma_t \alpha_t(\sigma_t, \tau, y) S_t$  と表せる。 $\lambda' \sigma_t \alpha_t(\sigma_t, \tau, y)$  を  $\beta_t(\sigma_t, \tau, y)$  と置き、 $\mathcal{E}[g(S_t, \sigma_t)]$ 、 $\mathcal{E}^2[g(S_t, \sigma_t)]$ 、...、 $\mathcal{E}^n[g(S_t, \sigma_t)]$  を導出すると  $\mathcal{E}[g(S_t, \sigma_t)]$ 、 $\mathcal{E}^2[g(S_t, \sigma_t)]$ 、...、 $\mathcal{E}^n[g(S_t, \sigma_t)]$  は  $S_t$  の線形と表せる。さらに、これを式(21)に代入すると「期待ヘッジゲイン  $E_t(\Pi_{t,t+\tau})$  も  $S_t$  の線形」で表せる。

$$E_t(\Pi_{t,t+\tau}) = S_t f_t[\sigma_t, \tau, y] \quad (22)$$

ここで、 $f_t[\sigma_t, \tau, y]$  は期待ヘッジゲイン  $E_t(\Pi_{t,t+\tau})$  の要素における  $S_t$  の影響を受けない関数である。ボラティリティ・リスク・プレミアムが0であっても、 $E(\Pi_{t,t+\tau}) / S_t$  が0であるとは限らない。実際の市場では、

1) 実際のボラティリティと予測ボラティリティとの乖離、

2) 離散と連続での乖離、

などのような原因が挙げられる。そこで、本研究ではボラティリティ・リスク・プレミアムによる乖離の変数  $y$ 、 $\tau$ 、 $\sigma_t$  を変化させて期待ヘッジゲインの感応度を調べることで、仮説「ボラティリティ・リスク・プレミアムが0でない」を検証する。具体的な検証については、次節で説明する。

## 4. 実証分析手法

本研究では、Bakshi/Kapadia(2003)と同様に、節 4.1、節 4.2 においては  $E_t(\Pi_{t,t+\tau})/S_t$  の変化を示すことでボラティリティ・リスク・プレミアムが 0 でないことを検証する手法を示し、節 4.3 においてはボラティリティ・リスク・プレミアムの符号を検証する手法を示す。

#### 4.1 期待ヘッジゲインのマネーネス感応度

式(22)より、 $E_t(\Pi_{t,t+\tau})/S_t$  の要素による変化は、ボラティリティ・リスク・プレミアムが 0 でないことを意味する。そのため、ヘッジゲイン  $E_t(\Pi_{t,t+\tau})/S_t$  の変数の 1 つであるマネーネス  $y$  を変化させ、期待ヘッジゲインの感応度を観察すればボラティリティ・リスク・プレミアムが 0 でないことが検証できる。

#### 4.2 ATM 期待ヘッジゲインのボラティリティ感応度

節 4.1 でマネーネス  $y$  による感応度を他の条件を固定させずに検証したので、次にマネーネス  $y$  を ATM 付近に固定し、 $E_t(\Pi_{t,t+\tau})/S_t$  のボラティリティ  $\sigma_t$  を変化させ、ボラティリティ  $\sigma_t$  に対する期待ヘッジゲインの感応度を観察することでボラティリティ・リスク・プレミアムが 0 でないことを検証する。

#### 4.3 期待ヘッジゲインのベガ感応度

ベガ  $\partial C / \partial \sigma_t$  に関するヘッジゲインの感応度を観察し、ボラティリティ・リスク・プレミアムの符号を検証する。残存期間  $\tau$  の値が最大で約 0.2 年であるので式(21)における第 1 項が第 2 項よりも比重が大きい。残存期間  $\tau$  とボラティリティ  $\sigma_t$  を固定し、第 1 項のベガ  $\partial C_t / \partial \sigma_t$  による式(23)の回帰分析を行い、ボラティリティ・リスク・プレミアムの符号を検証する。また、回帰分析には最小 2 乗法を用い、回帰係数や  $t$  値を求める。

$$GAINS_t = \Psi_0 + \Psi_1 VEGA_t + e_t \quad (23)$$

ここで、 $GAINS_t$  は  $\pi_{t,t+\tau}/S_t$ 、 $VEGA_t$  はオプション・ベガ、 $e_t$  は残差を表す。回帰の説明変数  $VEGA$  には SV モデルにおけるベガが必要だが、扱いやすさを考慮し、BS モデルにおけるベガ式(24)を用いる。

$$VEGA_t = \exp \left( - \left( \frac{\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right)^2 / 2 \right) \quad (24)$$

この回帰分析によって、以下の 1), 2) が確認できる。

- 1)  $\Psi_1$  の  $t$  値が仮説検定「 $\Psi_1$  は 0 である」を棄却すれば、ボラティリティ・リスク・プレミアムが存在することがわかる。また、その際の  $\Psi_1$  の符号をボラティリティ・リスク・プレミアムの符号として解釈できる。
- 2) ATM で  $VEGA_t$  は最大値 1 をとるので、 $\Psi_0 + \Psi_1$  の大きさが概ね ATM オプションでの期待ヘッジゲインとなる。

### 5. 実証分析

#### 5.1 データ

実証分析は、2003 年 5 月から 2005 年 12 月の日経 225 オプション市場の日次コールオプション価格を使用する。オプション価格は、大阪証券取引所で公表されている価格を用いる。しかし、そのオプション価格データの中には外れ値がある場合や、取引がなく価格データがない場合もある。そこで、実証分析に用いるデータでそれらのオプション価格を省くために、以下のような条件を付加する。

- 1) BS インプライド・ボラティリティは 1% 以上 100% 未満(年率)とする。
- 2) 残存期間は 14 日以上 60 日以下とする。
- 3) ATM から離れると流動性が小さくなるため、ATM からの乖離マネーネス  $y-1$  は -10% 以上 10% 以下とする。
- 4) コールオプション価格が無裁定となる上下限  $[Se^{-rt} - e^{-rt}K, Se^{-rt}]$  内にあるものを採用する。

対象期間において、日本はゼロ金利政策下であるのでリスクフリーレート  $r$  を 0 とする。日次配当利回り  $z$  は、プット・コール・パリティ  $P_t + S_t = C_t + K \exp((-r+z)\tau)$  を利用して現時点  $t$  から最も近い満期のオプション価格(対象は全権利行使価格)を用いて算出される  $z$  の平均値とする。ここで、 $P_t$  はプットオプシ

ョン価格を示す。

## 5.2 設定

節 4.1 における検証ではマネーネス  $y$  を変化させて期待ヘッジゲインの感応度を検証するが、マネーネス  $y$  の変化として ATM との乖離マネーネス  $y-1$  を -10% から 10% の 2.5% 区間刻みの 8 通り、残存期間  $\tau$  (日) は、[14-30], [31-60], [14-60] の 3 通りの、計 24 通りの区間の期待ヘッジゲインを比較する。節 4.2 における検証ではボラティリティを変化させて ATM オプションの期待ヘッジゲインの感応度を検証するが、ATM コールオプションとして  $y \in \{-2.5\%, 0\%, [0\%, 2.5\%]\}$  の 2 通りを用い、ボラティリティの変化として 12% から 26% の範囲で 2% 区間刻みとした 7 通りの、計 14 通りの区間における期待ヘッジゲインを比較する。ボラティリティとしては、式(25)のヒストリカル・ボラティリティ  $VOL_t^h$  を用いる。

$$VOL_t^h = \sqrt{\frac{252}{(\tau+1)-1} \sum_{n=t-\tau}^t (R_{n-1,n} - \bar{R})^2} \quad (25)$$

ここで、 $R_{n-1,n}$  は時点  $n-1$  から時点  $n$  までの株価リターン、 $\bar{R}$  は対象期間におけるリターンの期待値を示す。節 4.3 における検証では、 $VEGA_t$  による回帰分析を行い、期待ヘッジゲインの感応度を検証するが、残存期間  $\tau$  (日) は [28-32], [43-47] の 2 通り、 $VOL_t^h$  は十分なサンプル数を得るために 12% から 28% の 4% 区間刻みの 4 通りの、計 8 通りの回帰分析をする。

具体的なコールオプションの離散ヘッジゲイン式(12)の  $\Delta_{t_n}$  について以下で説明する。この  $\Delta_{t_n}$  は厳密には SV モデルにおけるヘッジ比率を用いなければならないが、扱いやすさを考慮に入れて BS モデルにおけるヘッジ比率式(26)を用いる。しかし、ボラティリティ・リスク・プレミアムによって SV モデルと BS モデルにおけるヘッジ比率にも乖離が生じ、期待ヘッジゲインにも影響が考えられる。それを考慮に入れた研究(Bakshi/Kapadia(2003))では、シミュレーションにおいて BS ヘッジ比率と SV ヘッジ比率での期待ヘッジゲインのバイアスは微小である結果を示されている。

$$\Delta_{t_n} = N\left(\frac{1}{\sigma_{t,t+\tau}\sqrt{t_n}} \log(y_n) + \frac{1}{2} \sigma_{t,t+\tau} \sqrt{t_n}\right) \quad (26)$$

ここで、 $\sigma_{t,t+\tau}$  は GARCH(1,1)モデル([1]を参照)での予測 GARCH ボラティリティを用いる。

## 5.3 実証分析・結果

### 5.3.1 期待ヘッジゲインのマネーネス感応度結果

表 1 は、マネーネス別の期待ヘッジゲインの結果である。横に残存期間、縦に  $y-1$  をとった、 $E_t(\pi_{t,t+\tau})$ ,  $E_t(\pi_{t,t+\tau}/S_t)$ ,  $E_t(\pi_{t,t+\tau}/C)$  の期待値を、一番右列はヘッジゲインが負の割合を示している。

表 1. 日経 225 インデックス・コールオプションにおける期待ヘッジゲイン

$y-1$	$E_t(\pi_{t,t+\tau})$ (円)			$E_t(\pi_{t,t+\tau}/S_t)$			$E_t(\pi_{t,t+\tau}/C)$			$\pi < 0$
	14-30	31-60	ALL	14-30	31-60	ALL	14-30	31-60	ALL	
-10.0% ~ -7.5%	-5.18	-14.05	-10.79	-0.06%	-0.13%	-0.10%	-46.73%	-10.36%	-24.02%	54%
-7.50% ~ -5.0%	-13.94	-43.27	-32.03	-0.13%	-0.39%	-0.29%	-57.64%	-61.28%	-59.91%	70%
-5.0% ~ -2.5%	-17.24	-49.53	-37.39	-0.16%	-0.45%	-0.34%	-50.29%	-52.73%	-51.83%	71%
-2.5% ~ 0.0%	-40.24	-54.86	-49.31	-0.36%	-0.50%	-0.45%	-82.00%	-33.96%	-52.19%	79%
0.0% ~ 2.5%	-28.98	-30.31	-29.77	-0.26%	-0.27%	-0.26%	-43.40%	-8.97%	-22.51%	74%
2.5% ~ 5.0%	-17.17	-23.74	-20.99	-0.16%	-0.21%	-0.19%	18.88%	5.64%	11.12%	70%
5.0% ~ 7.5%	-13.13	-12.58	-12.80	-0.12%	-0.12%	-0.12%	-4.43%	2.31%	-0.31%	67%
7.5% ~ 10.0%	-0.95	2.01	0.75	-0.02%	0.01%	-0.01%	15.44%	6.83%	10.45%	56%

ほぼ全てのオプションにおいて期待ヘッジゲインは負である。残存期間が 14-30、 $y-1$  が [-2.5% - 0%] の ATM オプションで約 40 円の期待ヘッジゲインの損失があることを示している。コールオプションを購入・株を売却するポジションなので、その期待ヘッジゲインはオプションの買い手が売り手にコールオプション 1 単位当たり約 40 円のボラティリティが変動することによるプレミアムを多く支払っていることを意味する。日経 225 オプションの出来高が膨大であると、このプレミアムは経済に多大な影響を与え得る。

1) ATM 付近 [-2.5%, 2.5%] でベガが最大であり、期待ヘッジゲインの損失もベガに連動する。

2) 残存期間が長いと期待ヘッジゲインの損失は大きく、式(21)と整合的である。

表1から以上の2つが考察できる。これより、変数 $y$ と $\tau$ について期待ヘッジゲインの変化が見られ、ボラティリティ・リスク・プレミアムが0でないことが確認できた。

次に、日米の市場における違いを考察する。図2は横軸に ATM との乖離、縦軸に  $E_t(\pi_{t,t+\tau} / S_t)$  (期待ヘッジリターン)とし、マネーネス別に期待ヘッジゲインを日米で比較している。

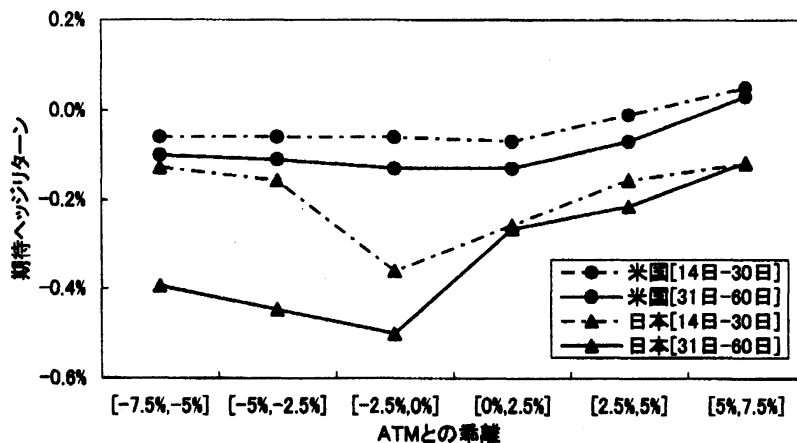


図2. 日米のマネーネス別  $E_t(\pi_{t,t+\tau} / S_t)$

図2を見ると、日米ともに ATM 付近で期待ヘッジリターンの絶対値が大きい傾向がある。しかし、日本の期待ヘッジリターンの方が0からの乖離は大きく、プレミアムが高く設定されている。オプションとはヘッジの手段として用いられており、高いプレミアムが付加されていても買い手の需要があることより、「日本人は米国人に比べ、保守的である」と考えられる。

### 5.3.2 ATM 期待ヘッジゲインのボラティリティ感応度結果

日米での、ボラティリティ別 ATM 期待ヘッジリターン結果を図3に示す。

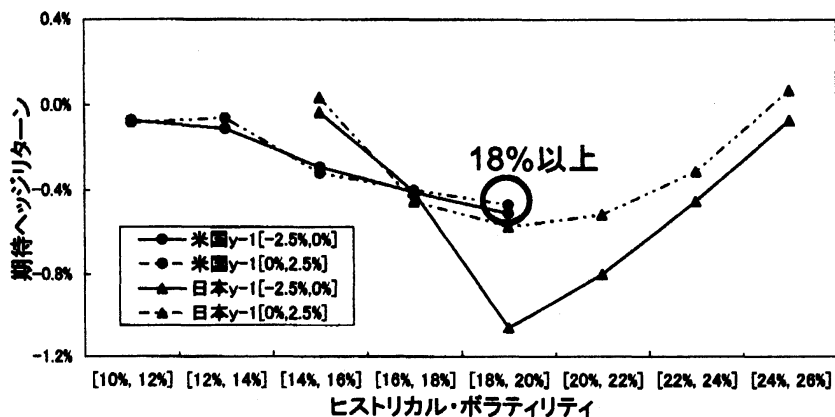


図3. 日米ヒストリカル・ボラティリティ別期待ヘッジリターンの比較

米国のヒストリカル・ボラティリティ[18%, 20%]における値は、「18%以上」の区間における期待ヘッジリターンを表している。図3は、ボラティリティの変動によって期待ヘッジリターンも変動しており、ボラティリティ・リスク・プレミアムが0でない証拠となる。日米の相違は2つ挙げられる。

- 1) 米国ではボラティリティが高くなるほど期待ヘッジリターンの絶対値も大きくなるが、日経225オプション市場の期待ヘッジリターンはボラティリティが20%以下では米国と同様である。しかし、20%以上のボラティリティにおいては期待ヘッジリターンの絶対値は小さくなるという違いが確認できた。
- 2) 米国では  $y-1$  [-2.5%, 0%] と  $y-1$  [0%, 2.5%] における期待ヘッジリターンには相違が見られないが、日本では大きく相違があり、ボラティリティ別の感応度でもマネーネスの影響が確認された。



### 5.3.3 ベガによるヘッジゲインの感応度によるボラティリティ・リスク・プレミアム符号判別

表 2 は日経 225 市場, 表 3 は S&P500 市場における回帰式(23)の  $VEGA$  による回帰結果を示している。表 2, 3 は縦にボラティリティ  $VOL_t^h$  を, 横に残存期間  $\tau$  をとり, 回帰係数  $\Psi 0$ ,  $\Psi 1$  とその  $t$  値([ ]内の数値)を示している。

表 2. 日経 225 市場の  $VEGA$  回帰結果

VOL	28-32day option		43-47day option	
	$\Psi 0$	$\Psi 1$	$\Psi 0$	$\Psi 1$
12%-16%	0.119	-0.07	0.118	-0.04
t値	[2.58] **	[-0.79]	[1.81] *	[-0.36]
16%-20%	0.231	-0.86	0.197	-0.77
t値	[2.69] ***	[-6.97] ***	[1.79] *	[-5.23] ***
20%-24%	0.300	-0.76	0.129	-0.68
t値	[3.30] ***	[-6.45] ***	[0.78]	[-3.36] ***
24%-28%	0.300	-0.31	0.020	-0.19
t値	[2.25] **	[-1.85] *	[0.08]	[-0.62]

\*は 10%棄却, \*\*は 5%棄却 \*\*\*は 1%棄却。

表 3. S&P500 市場の  $VEGA$  回帰結果

VOL	30day option		44day option	
	$\Psi 0$	$\Psi 1$	$\Psi 0$	$\Psi 1$
8%-10%	0.046	-0.18	0.195	-0.36
t値	[1.22]	[-4.15] ***	[2.38] **	[-10.57] ***
10%-12%	0.018	-0.06	0.07	-0.14
t値	[0.26]	[-1.02]	[0.75]	[-2.05] **
12%-14%	0.029	-0.19	0.062	-0.41
t値	[0.53]	[-3.94] ***	[0.81]	[-8.35] ***
14%-16%	0.129	-0.53	0.025	-0.29
t値	[1.61]	[-10.83] ***	[0.13]	[-1.38]
16%-18%	0.029	-0.67	0.283	-0.66
t値	[0.47]	[-8.69] ***	[1.95] **	[-5.90] ***
18%-	-0.052	-0.47	0.421	-0.86
t値	[-0.17]	[-1.69] *	[1.96] **	[-4.15] ***

表 2 を見ると, 今までの実証結果の正当性を確かめる結果が 2 つ挙げられる。

- 1) 係数  $\Psi 1$  は全て負であり, ボラティリティ・リスク・プレミアムも負である。
- 2) 帰無仮説「 $\Psi 1 = 0$ 」が棄却された係数に注目すると, 全て  $\Psi 1 < 0$  であり, ボラティリティ・リスク・プレミアムは負である。t 値から  $\Psi 1$  が有意であることが確認され, ATM で最大値をとる  $VEGA$  と連動し, 「期待ヘッジゲインは ATM 付近で最大値をとる」が確かめられた。この実証結果から, 日経 225 オプション市場の「ボラティリティ・リスク・プレミアムが負」であるとわかり, 負のボラティリティ・リスク・プレミアムの影響によってオプション価格が潜在的に高く, オプションの買い手の期待ヘッジゲインは負になる。

以上の 3 通りの検証結果から, ボラティリティ・リスク・プレミアムが負であることが確認できた。

## 6. まとめ

本研究では, Bakshi/Kapadia(2003)が示した SV モデルの枠組みにおけるボラティリティ・リスク・プレミアムと期待ヘッジゲインとの関係を整理したうえで, その関係について日経 225 オプション市場を対象として実証分析を行った。得られた結果を Bakshi/Kapadia(2003)にある米国 S&P500 のものと比較して米国と日本との市場の違いについて考察した。

実証結果からは, 日経 225 オプション市場で期待ヘッジゲインを生成する各要素の変化と  $VEGA$  による回帰により, 「ボラティリティ・リスク・プレミアムは負」であることがわかった。また, 日米の比較では, 日本の方がオプションに内在するボラティリティ・リスク・プレミアムが大きく, 「日本人は米国人に比べ, 保守的である」と考えられる。

## 7. 参考文献

- [1] Bakshi, G., N.Kapadia, "Delta-Hedged Gains and the Negative Market Volatility Risk Premium," *Review of Financial Studies*, 16, 2003, 527-566.
- [2] Bakshi, G., N. Kapadia, and D. Madan, "Stock Return Characteristics, Skew Laws, and the Diefferential Pricing of Individual Equity Options," *Review of Financial Studies*, 16, 2003, 101-143.
- [3] Bertsimas, D., L. Kogan, and A. Lo, "When is Time Continuous," *Journal of Financial Economics*, 55, 2000, 173-204.
- [4] Figlewski, S., "Options Arbitrage in Imperfect Markets," *Journal of Finance*, 44, 1989, 1289-1311.
- [5] Heston, S., "A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options," *Review of Financial Studies*, 6, 1993, 327-343.